ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 519.73: 330.33

О. Г. Яковенко, Т. Ю. Сидора
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ЗОВНІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА НА ДІЯЛЬНІСТЬ ПІДПРИЄМСТВА

Побудовано алгоритм числової реалізації моделі темпу приросту капіталу у системі MathCad. Визначено функцію прибутку підприємства з урахуванням впливу зовнішнього середовища.
Ключові слова: моделювання, темп приросту капіталу, числова реалізація.

Актуальність проблеми. Україна як незалежна держава переживає вже не першу фінансово-економічну кризу. Це є закономірним «побічним ефектом» ринкової економіки, курс на побудову якої задекларувала і дотримується українська влада. Сьогоднішня економічна криза для України матиме досить багатогранні негативні наслідки, які проявляться в зниженні обсягу ВВП, погіршенні фінансових результатів підприємств, падінні реальних доходів населення та зниженні інвестиційної активності. Але вона для України є необхідною і обов'язковою передумовою подальшого економічного піднесення, як і криза 1998 р., що дала імпульс для десятирічної фази зростання вітчизняної економіки. Проте якщо вихід з кризи не буде супроводжуватися активною структурною політикою держави, спрямованою на підтримку високотехнологічних галузей, то економіка України продовжуватиме рухатися не по спіралі, а по замкненому колу. Тому актуальною проблемою для підприємств є побудова такої моделі поведінки, яка б забезпечувала приріст капіталу в умовах циклічних змін економіки.

Аналіз останніх наукових досліджень. Відповідно до моделі [1] встановлено, що існують коливання економічної активності з різним періодом: сезонні цикли (менше року), цикли до 3,5 років, торговельно-промислові цикли до 7 – 11 років, великі цикли від 50 років. Виявлено, що такі цикли пов’язані з певними технічними напрямками та періодичністю оновлення основних капітальних благ. Одночасно з цим існує взаємозв’язок між циклічними та збалансованими явищами в економіці, де циклу інвестування на макрорівні відповідає стабільна програма. Ця програма реалізується системою відтворення капіталу, а її довжину можемо оцінити як величину запланованого його приросту. У цьому випадку система відтворення капіталу використовує всі етапи програми, і взаємодія між темпами приросту капіталу здійснюється з відповідною швидкістю. Запропонована програма інвестування передбачає споживання ресурсу та його переливання у використаний капітал [2 – 4].

Основні результати дослідження. Побудуємо модель для визначення темпу приросту капіталу. Нехай $k(\tau, x)$ – темп приросту капіталу на відрізку $[0; l(\tau)]$ є кусково-гладкою або кусково-монотонною і, крім того, абсолютно інтегрованою функцією. Введемо такі величини: x – запланований приріст капіталу, $\nu(\tau)$ – швидкість зміни темпу приросту капіталу. Маємо крайову задачу, яку можна подати у вигляді [5]:

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\nu^2(\tau)} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < l(\tau),$$

$$k(\tau_0, x) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial k}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \Psi(x),$$

$$k(\tau, 0) = \mu(\tau), \quad k(\tau, l(\tau)) = \chi(\tau).$$

Для розв’язання крайової задачі розроблено метод, згідно з яким послідовно застосовується скінченне інтегральне перетворення з «фіксованим» у часі ядром та алгоритм Рунге-Кутта, який визначає значення коефіцієнтів відображення із задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

У випадку врахування неоднорідних крайових умов їх необхідно перетворити до однорідних. Тому перетворимо задані неоднорідні крайові умови першого роду до однорідних введенням нової невідомої функції:

$$\vartheta(\tau, x) = k(\tau, x) - \mu(\tau) - [\chi(\tau) - \mu(\tau)] \frac{x}{l(\tau)}.$$

Відносно цієї функції крайова задача набуде такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\nu^2(\tau)} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + f_1(\tau, x),$$

$$\vartheta(\tau_0, x) = \varphi_1(x), \quad \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \psi_1(x),$$

$$\vartheta(\tau, 0) = \vartheta(\tau, l(\tau)) = 0,$$

де:

$$f_1(\tau, x) = \frac{x\dot{l}}{l^2}\left[\dot{\chi} - \dot{\mu} + \frac{(\mu - \chi)\dot{l}}{l}\right] - \ddot{\mu} - \frac{x}{l}\left[\ddot{\chi} - \ddot{\mu} + (\dot{\mu} - \dot{\chi})(\dot{l} + \ddot{l}) - \frac{\dot{l}^2}{l}(\dot{\mu} - \dot{\chi})\right],$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \mu(\tau_0) - [\chi(\tau_0) - \mu(\tau_0)] \frac{x}{l(\tau_0)},$$

$$\psi_1(x) = \psi(x) - \dot{\mu}(\tau_0) - [\dot{\chi}(\tau_0) - \dot{\mu}(\tau_0)] \frac{x}{l(\tau_0)} - \frac{[\mu(\tau_0) - \chi(\tau_0)] x \dot{l}(\tau_0)}{l^2(\tau_0)}.$$

Виходячи з виду крайових умов, застосуємо до диференціального рівняння та початкових умов інтегральне перетворення, яке має ядро $\sin \frac{n\pi x}{l}$. Тоді розкладення функції $\vartheta(\tau, x)$ у ряд Фур’є при фіксованому значенні τ матиме вигляд:

$$\vartheta(\tau, x) = \frac{2}{l(\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \sin \frac{n\pi x}{l(\tau)},$$

$$\alpha_n(\tau) = \int\limits_0^{l(\tau)} \vartheta(\tau, x) \sin\frac{n\pi\, x}{l(\tau)} dx\,.$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів $\alpha_n(\tau)$ помножимо члени рівняння у частинних похідних на ядро інтегрального перетворення та зінтегруємо за змінною x на відрізку $[0; l(\tau)]$:

$$\int\limits_0^l \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2} \sin\frac{n\pi\, x}{l} dx = \frac{1}{\nu^2(\tau)} \int\limits_0^l \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \sin\frac{n\pi\, x}{l} dx + \int\limits_0^l f_1(\tau, x) \sin\frac{n\pi\, x}{l} dx\,.$$

Обчисливши отримані інтеграли, визначимо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно $\alpha_n(\tau)$:

$$\frac{d^2\alpha_n}{d\tau^2} + \left(\frac{n\pi}{\nu l}\right)^2 \alpha_n = \frac{\dot{l}}{2l} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{nm}\alpha_m + q_n^{(1)}(\tau)\,;$$

$$\gamma_{nm} = \frac{4(-1)_{nm}^{n+m}}{m^2 - n^2}, \quad при \quad n \neq m\,;$$

$$\gamma_{nm} = 1, \quad при \quad n = m\,;$$

$$q_n^{(1)}(\tau) = \int\limits_0^l f_1(\tau, x) \sin\frac{n\pi\, x}{l} dx\,. \tag{1}$$

Приєднуючи до одержаної системи рівнянь початкові умови

$$\alpha_n(\tau_0) = \int\limits_0^{l(\tau_0)} \varphi_1(x) \sin\frac{n\pi\, x}{l(\tau_0)} dx\,,$$

$$\left.\frac{d\alpha_n}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \int\limits_0^{l(\tau_0)} \Psi_1(x) \sin\frac{n\pi\, x}{l(\tau_0)} dx\,, \tag{2}$$

визначимо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Якщо покласти, що $l(\tau) = const$, тобто маємо частковий випадок моделі, то визначена задача Коші перетвориться на задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку. Таким чином, темп приросту капіталу у цьому випадку матиме такий вигляд:

$$k(\tau, x) = \frac{2}{l(\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \sin\frac{n\pi\, x}{l(\tau)} + \mu(\tau) + [\chi(\tau) - \mu(\tau)] \frac{x}{l(\tau)}\,. \tag{3}$$

Розробимо алгоритм числової реалізації такої моделі [7]. Для цього введемо такі позначення: $a = \varphi(x)$, $b = \psi(x)$, $c = \mu(\tau)$, $d = \chi(\tau)$, $\eta \exp(-\mu\tau) = l(\tau)$.

Враховуючи, що функціональний ряд для визначення функції $k(\tau, x)$ в області збіжності збігається рівномірно, можна обмежити число членів цього ряду чотирма. При цьому похибка не буде перевищувати значення 10^{-3}.

Для знаходження значень функції приросту капіталу $k(\tau, x)$ у системі MathCad необхідно визначити невідомі коефіцієнти $\alpha_n(\tau)$. Для цього слід розв'язати таку задачу Коші:

$$\frac{d^2\alpha_n}{d\tau^2}+\left(\frac{n\pi}{\nu l}\right)^2\alpha_n=\frac{\dot{l}}{2l}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{nm}\alpha_m+q_n^{(1)}(\tau),$$

$$\gamma_{nm}=\frac{4(-1)_{nm}^{n+m}}{m^2-n^2},\quad при\quad n\neq m,$$

$$\gamma_{nm}=1,\quad при\quad n=m,$$

$$q_n^{(1)}(\tau)=\int_0^l f_1(\tau,x)\sin\frac{n\pi\,x}{l}dx$$

з початковими умовами:

$$\alpha_n(\tau_0)=\int_0^{l(\tau_0)}\varphi_1(x)\sin\frac{n\pi\,x}{l(\tau_0)}dx,$$

$$\left.\frac{d\alpha_n}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}=\int_0^{l(\tau_0)}\Psi_1(x)\sin\frac{n\pi\,x}{l(\tau_0)}dx.$$

Спочатку слід розрахувати числові значення початкових умов. Для цього всі коефіцієнти запишемо у вигляді змінних та присвоїмо їм відповідні значення. Отримаємо в результаті вектори значень для $\alpha_n(\tau)$ та $\alpha'_n(\tau)$.

Для знаходження матриці значень γ_{nm} запишемо програму. Слід звернути увагу, що при програмуванні результат виконання умови у MathCad записується до самої умови, а всі оператори необхідно вводити за допомогою спеціальних панелей інструментів – Programming та Boolean. Отримавши матрицю значень γ, ми маємо все необхідне для знаходження α_n.

Для розв'язування системи диференціальних рівнянь будемо використовувати функцію $Rkadapt(y,x1,x2,n,F)$ з розділу Differential Equation Solving, яка повертає матрицю розв'язків методом Рунге-Кутта. Згідно з розробленим в роботі алгоритмом розв'язання системи диференціальних рівнянь слід передати до функції такі параметри: перший – це початкове значення аргументу (тобто наш вектор початкових значень), другий та третій – це, відповідно, початок та кінець того відрізку, для якого буде проводитися інтегрування (початкове та кінцеве значення τ), четвертий – це кількість кроків інтегрування, і останній – сама функція $F(\tau,\alpha)$ для нашого рівняння $d\alpha_n/d\tau=F(\tau,\alpha)$. Враховуючи, що ця функція не працює з диференціальними рівняннями другого порядку, зведемо нашу задачу до розв'язування системи з диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього позначимо $\frac{d\alpha_n}{d\tau}$ через α_{n+4}. Виконавши заміну, ми отримуємо систему з 8 рівнянь. Зазначивши у векторі α відповідні початкові умови, які ми отримали раніше, можна знайти матрицю розв'язків F.

Для використання отриманих результатів у подальших розрахунках, необхідно позначити стовпчики матриці так:

$$\tau_n:=B_{n,1}\quad \alpha_{n,1}:=B_{n,2}\qquad \ldots\qquad \alpha_{n,m}:=B_{n,m}.$$

Щоб розрахувати значення функції $k(\tau, x)$, виконуємо заміну τ на τ_n, α_m на $\alpha_{n,m}$, а $k(\tau, x)$ на $k(n)$ та записуємо просту програму вигляду:

$$k(n) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow f(\tau, \alpha) \\ k \end{array} \right.$$

Тепер, ввівши ім'я функції k, значення n у дужках та знак рівняння, ми отримуємо значення функції k для відповідного значення τ_n.

Врахуємо вплив зовнішнього середовища, яке відповідає циклічній економічній активності для визначення прибуткової діяльності підприємства. Слід зазначити, що математичне моделювання виробництва підприємства повинно враховувати зовнішні та внутрішні умови діяльності цього підприємства. Це визначає появу складного комплексу моделей діяльності підприємства у певних умовах. Важливе при цьому має значення оптимальна поведінка підприємства: оптимізація процесів виробництва, оптимальний розподіл коштів та використання різних факторів виробництва. Уведемо класичні припущення [6]:

- технологічні умови виробництва описуються виробничою функцією $q = F(x)$, яка має певний комплекс властивостей;
- врахування можливостей підприємства впливати на ціну своєї продукції та на ціни факторів виробництва;
- врахування наявності ресурсних обмежень;
- метою діяльності підприємства є забезпечення максимальних прибутків або мінімізація збитків.

Припустимо, що для визначення поведінки підприємства було використано m видів затрат, тоді функція випуску продукції матиме такий вигляд:

$$\Phi(q, y, P) = \Phi(q_1, ..., q_n; y_1, ..., y_m, P) = 0,$$

де P – приріст капіталу в зовнішньому середовищі.

$$P = \int_0^T k(\tau, x) d\tau.$$

Функція прибутку π визначається як:

$$\pi(q, y) = qp - yw = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{j=1}^{m} w_j y_j,$$

де w – вектор цін на витрати, p – вектор цін продукції, $y(P)$ – вектор витрат, q – вектор загального випуску продукції. Сформулюємо обмеження для такої моделі:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \le 0; \ \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} \ge 0; \ i = 1, ..., n; \ j = 1, ..., m.$$

Умови рівноваги підприємства знаходять у довгостроковому періоді як розв'язок такої екстремальної задачі:

$$\pi(q, y) \to \max; \ \Phi(q, y, P) = 0; \ q \ge 0; \ y \ge 0, \ P \ge 0.$$

Така задача може бути розв'язана, наприклад, методом Лагранжа.

Таким чином, рівняння (3), а також задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (1), (2) визначають темп приросту капіталу. Побудовано алгоритм числової реалізації такої моделі у системі MathCad. Визначено функцію прибутку підприємства з урахуванням впливу зовнішнього середовища.

Бібліографічні посилання і примітки

1. Кондратьев Н. Д. Проблемы экономической динамики / Н. Д. Кондратьев. – М.: Экономика, 1989. – 526 с.
2. Николаев Л. К. О циклах экономической активности в процессе роста капитала / Л. К. Николаев // Экономика и математические методы. – 2003. – Т. 39. – № 1. – С. 33–42.
3. Меньшиков С. М. Длинные волны в экономике / С. М. Меньшиков, Л. А. Клименко. – М.: Международные отношения, 1989.
4. Моргенштерн О. О точности экономико-статистических наблюдений / О. Моргенштерн. – М. : Статистика, 1968.
5. Яковенко О. Г. Циклічні процеси у макромоделях економічної динаміки / О. Г. Яковенко // Економічна кібернетика. – 2004. – № 5–6. – С. 42–46.
6. Клейнер Г. Б. Методы анализа производственных функций / Г. Б. Клейнер. – М.: Информэлектро, 1980.
7. Яковенко О. Г. Алгоритм розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь у програмі MathCad / О. Г. Яковенко, Т. Ю. Сидора // Моделювання сучасних економічних процесів та інформаційні технології : матеріали І Всеукр. наук.-практ. конф. – Д., 2009. – Т. 2. – С. 23–25.

Надійшла до редколегії 25.06.2009.