УДК 519.23

Ю. Є. Чернявський
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

АНАЛІЗ ПОКАЗНИКІВ АСИМЕТРИЧНОСТІ РОЗПОДІЛУ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ЕКОНОМІЧНОГО РИЗИКУ

У статті розглянуто вплив асиметричності закону розподілу норми прибутку на числові характеристики і отримано ряд формул, які можна застосувати у дослідженні ступеня ризику з урахуванням цієї асиметричності.

Ключові слова: прибуток, ризик, асиметрія.

Актуальність проблеми. У теорії економічного ризику вже стало загальним місцем оцінювання показників ефективності проектів за співвідношенням очікуваної прибутковості (що обчислюється як математичне сподівання норми прибутку) та ризику (що оцінюється дисперсією або стандартним відхиленням норми прибутку). На аналізі цих показників базується вся класична теорія ефективного портфеля [1–6].

Аналіз останніх наукових досліджень. Досягнення останніх років у царині економічного ризику – це врахування несиметричності розподілу норми прибутку, яке іноді може принципово змінити вибір об'єкта інвестування. При цьому ступінь ризику обчислюють лише за негативними відхиленнями, тобто оцінюють ***недоотримання*** прибутку порівняно з очікуваним значенням (математичним сподіванням). З'являються показники, що мають назву ***семідисперсія*** **SD** (або семіваріація) та ***семістандартне відхилення*** **Sσ**.

Мета роботи. У теорії ймовірностей завжди існував показник асиметричності розподілу під назвою ***асиметрія***. Додатково аналізу на симетричність служило порівняння між собою усіх характеристик положення, тобто математичного сподівання, моди та медіани. У випадку симетричного розподілу усі вони співпадають, і що більша несиметричність, то більше вони різняться. Метою даного дослідження є спроба послідовного аналізу з точки зору несиметричності розподілу ***всіх*** числових характеристик випадкової величини (норми прибутку).

Основні результати дослідження. Будемо розглядати окремо ***негативні*** відхилення $(m_x - x)$ що власне характеризують власне ступінь ризику, тобто недоотримання норми прибутку порівняно з очікуваним значенням. І окремо оцінюємо ***позитивні*** відхилення, $(x - m_x)$, коли випадкова величина виявляється більшою від математичного сподівання.

1. ***Несиметричність ймовірностей*** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp = \int_{-\infty}^{m_x} dp + \int_{m_x}^{+\infty} dp = P^{-} + P^{+} = 1 \ .$$

За умови симетричності $P^{-} = P^{+} = 0{,}5$ (математичне сподівання збігається з медіаною).

2. Несиметричність математичного сподівання.

При обчисленні математичного сподівання та всіх інших характеристик теж будемо розділяти окремо ті можливі значення випадкової величини, що менші за математичне сподівання, і окремо ті, що більші від нього:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dp = \int_{-\infty}^{m_x} x \cdot dp + \int_{m_x}^{+\infty} x \cdot dp = \left[\frac{\int_{-\infty}^{m_x} x \cdot dp}{\int_{-\infty}^{m_x} dp} \right] \cdot P^- + \left[\frac{\int_{m_x}^{+\infty} x \cdot dp}{\int_{m_x}^{+\infty} dp} \right] \cdot P^+ .$$

Якщо позначити середні окремо через m^- та m^+, маємо (див. рис.1)

$$m_x = m^- \cdot P^- + m^+ \cdot P^+ . \qquad (1)$$

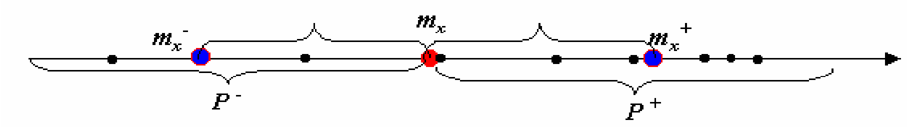

Рис. 1. “Негативні” та “позитивні” середні.

За умови симетричності $P^- = P^+ = 0{,}5 \;\Rightarrow\; m_x = \dfrac{m^- + m^+}{2}$. (2)

3. ***Несиметричність середнього відхилення.***

У теорії ймовірностей та математичній статистиці існує така характеристика розкиду, як ***середнє абсолютне відхилення***, що усереднює ***модулі*** відхилень. Переважно її використовують у статистиці, бо аналітичні перетворення формул із модулем, то є важка і невдячна справа. Проте основною характеристикою розкиду виступає ***дисперсія***, в якій усереднюють квадрати відхилень. Але тут середнє абсолютне відхилення розглянемо більш детально.

Середнє значення ***негативних*** відхилень:

$$\theta^- = \frac{\int_{-\infty}^{m_x} (m_x - x) \cdot dp}{\int_{-\infty}^{m_x} dp} = m_x - \left[\frac{\int_{-\infty}^{m_x} x \cdot dp}{\int_{-\infty}^{m_x} dp} \right] .$$

Другий доданок – середнє всіх ***негативних*** значень випадкової величини, що позначено вище як m^- . Тоді

$$\theta^- = m_x - m_x^- . \qquad (3)$$

Аналогічно, середнє значення ***позитивних*** відхилень:

$$\theta^{+} = \frac{\int\limits_{m_x}^{+\infty} (x - m_x) \cdot dp}{\int\limits_{m_x}^{+\infty} dp} = \frac{\int\limits_{m_x}^{+\infty} x \cdot dp}{\int\limits_{m_x}^{+\infty} dp} - m_x ,$$

тобто
$$\theta^{+} = m_x^{\ +} - m_x \qquad (4)$$

Очевидно, що
$$m_x = m_x^{\ -} + \theta^{-} = m_x^{\ +} - \theta^{+} \qquad (5)$$

Зв'язок між середніми відхиленнями та математичними сподіваннями показаний на рис. 2.

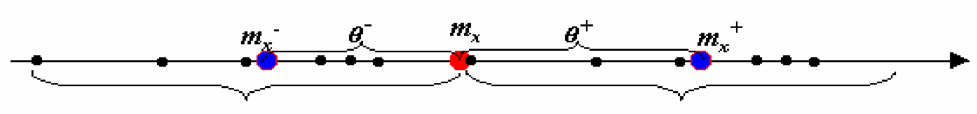

Рис. 2. "Негативні" та "позитивні" середні відхилення.

Тепер розглянемо ***повне***, ***двостороннє середнє відхилення***

$$\theta_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x - m_x| \cdot dp = \int\limits_{-\infty}^{m_x} (m_x - x) \cdot dp + \int\limits_{m_x}^{+\infty} (x - m_x) \cdot dp =$$

$$= \left[\frac{\int\limits_{-\infty}^{m_x} (m_x - x) \cdot dp}{\int\limits_{-\infty}^{m_x} dp} \right] \cdot P^{-} + \left[\frac{\int\limits_{m_x}^{+\infty} (x - m_x) \cdot dp}{\int\limits_{m_x}^{+\infty} dp} \right] \cdot P^{+} \quad .$$

Отже, воно є середньозваженим ***негативної*** та ***позитивної*** частин:

$$\theta_x = \theta^{-} \cdot P^{-} + \theta^{+} \cdot P^{+} \ ; \qquad (6)$$

за умови симетричності
$$\theta_x = \theta^{-} = \theta^{+} \ .$$

Якщо ж пов'язати середнє відхилення з математичним сподіванням, то отримаємо:

$$\theta_x = (m_x - m^{-}) \cdot P^{-} + (m^{+} - m_x) \cdot P^{+} = m_x \cdot (P^{-} - P^{+}) + (m^{+} \cdot P^{+} - m^{-} \cdot P^{-}) \quad .$$

Або ще один варіант цієї ж формули для θ_x тільки через m^{-} та m^{+} :

$$\theta_x = 2 P^{-} P^{+} \ (m^{+} - m^{-}) \qquad (7)$$

при симетричності
$$\theta_x = \frac{m^{+} - m^{-}}{2} \ .$$

4. *Несиметричність дисперсії.*

Дисперсія негативних відхилень (***семідисперсія***) D^- *або* SD^-:

$$D^- = \frac{\int_{-\infty}^{m_x} (m_x - x)^2 \cdot dp}{\int_{-\infty}^{m_x} dp} = m_x^{\ 2} - 2m_x \left[\frac{\int_{-\infty}^{m_x} x \cdot dp}{\int_{-\infty}^{m_x} dp} \right] + \left[\frac{\int_{-\infty}^{m_x} x^2 \cdot dp}{\int_{-\infty}^{m_x} dp} \right] .$$

За прийнятих позначень $D^- = m_x^{\ 2} - 2m_x \cdot m^- + M^-[X^2]$.

Якщо виразити її тільки через односторонні характеристики, то

$$D^- = M^-[X^2] - (m^-)^2 + (\theta^-)^2 \quad (8)$$

Для дисперсії позитивних відхилень маємо аналогічно:

$$D^+ = m_x^{\ 2} - 2m_x \cdot m^+ + M^+[X^2] \quad \text{або} \quad D^+ = M^+[X^2] - (m^+)^2 + (\theta^+)^2 \ . \quad (9)$$

Зауважимо, що обидві формули (8) та (9) для односторонньої дисперсії дуже схожі з відомою допоміжною формулою для підрахунку дисперсії. Але зараз з'являється ще й останній доданок, що пов'язаний з одностороннім середнім відхиленням.

5. *Повна дисперсія та її несиметричність.*

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot dp = \int_{-\infty}^{m_x} (x - m_x)^2 \cdot dp + \int_{m_x}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot dp =$$

$$= \left[\frac{\int_{-\infty}^{m_x} (x - m_x)^2 \cdot dp}{\int_{-\infty}^{m_x} dp} \right] \cdot P^- + \left[\frac{\int_{m_x}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot dp}{\int_{m_x}^{+\infty} dp} \right] \cdot P^+ \ .$$

Отже, повна дисперсія – то знов таки є середньозважене значення половинних дисперсій $D_x = D^- \cdot P^- + D^+ \cdot P^+$; (10)

за умови симетричності $D_x = D^- = D^+$. (11)

Якщо ж виражати дисперсію тільки через односторонні характеристики, то

$$D_x = (M^+[X^2] \cdot P^+ + M^-[X^2] \cdot P^-) - (m^- P^- + m^+ P^+)^2 \ .$$

За умови симетричності $D_x = \dfrac{M^+[X^2] + M^-[X^2]}{2} - \left(\dfrac{m^- + m^+}{2}\right)^2$.

У сучасній теорії ризику за традицією мірою ризику є ***дисперсія***, хоч повна, хоч половинна. У той же час при обчисленні у теорії ризику половинних характеристик розкиду все одно необхідно відділяти окремо ті значення, що більші за математичне сподівання, і окремо ті, що менше.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Отже, на думку автора, з цієї точки зору ***середнє відхилення нічим не гірше ніж дисперсія може характеризувати ступінь ризику***. Тому детальне вивчення усіх половинних характеристик розподілу та взаємозв'язків між ними може слугувати для подальшого детального аналізу ризику, у тому числі і спробі побудови варіанта теорії портфеля, що базувався би на урахуванні несиметричності розподілів норми прибутку.

Бібліографічні посилання і примітки

1. Markowitz H. Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments / H.Markowitz – N. Y.: Johu Wiley and Sons, 1959. – 129 p.
2. Moor P. J. The business of risk / P. J.Moor – Cambridge, 1983. – 375 p.
3. Elton E. J. Portfolio Theory and Investments Analyses / E. J. Elton, M. J.Gruber .– N. Y.: Johu Wiley and Sons, 1987. – 284 p.
4. Вітлінський В. В. Економічний ризик і проблеми його моделювання / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний. – К., 1993. – 8 с. –Деп. у КДЕУ 20.12.93, № 2499 – Ук93.
5. Вітлінський В. В. Ризик у менеджменті / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний. – К.:ТОВ "Борисфен-М", 1996. – 336 с.
6. Вітлінський В. В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко. – К.: КНЕУ, 2000. – 476 с.

Надійшла до редколегії 25.06.2009.