УДК 004.942: 336.761.6

О.Г. Яковенко, К.Н. Заворотченко
Днепропетровский национальный университет имени О. Гончара

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНА НА ОСНОВЕ БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ ВЕРОЯТНОСТИ РОСТА ЦЕНЫ БАЗОВОГО АКТИВА

В статье моделируется процесс ценообразования опциона на основе биномиальной модели с учетом расчетной вероятности роста цены базового актива и возможностью ее установления как константы. На основе построенной модели разработан программный продукт, который позволяет графически сравнить полученные результаты.
Ключевые слова: опцион, цена, биномиальная модель, деривативы.

В статті моделюється процес ціноутворення опціону на основі біноміальної моделі з урахуванням розрахункової ймовірності зростання ціни базового активу і можливістю її встановлення як константи. На основі побудованої моделі розроблено програмний продукт, що дозволяє графічно порівняти отримані результати.
Ключові слова: опціон, ціна, біноміальна модель, деривативи.

This paper presents an option pricing approach based on the binomial model, taking into account the estimated probability of the underlying asset price change, or setting it as a constant. The software, based on the developed model, makes it possible to present the results graphically and compare them.
Key words: option, price, binomial model, derivatives.

В Налоговом Кодексе Украины [1, ст. 14.1.45.2] опцион определен как **опцион** – гражданско-правовой договор, согласно которому одна сторона контракта получает право на приобретение (продажу) базового актива, а другая берет на себя обязательство продать (приобрести) базовый актив в будущем в течении срока действия опциона или на установленную дату (дату исполнения) и за определенной в момент составления такого контракта ценой базового актива. По условию опциона покупатель выплачивает продавцу премию опциона.

Со стороны покупателя опциона – покупка осуществляется для хеджирования риска – т.е. для уменьшения издержек в случае, если цена базового актива будет колебаться в невыгодном направлении. За это покупатель готов заплатить некоторую цену – премию опциона. Продавец, чтобы определить справедливую цену может руководствоваться одной из моделей ценообразования опционов, которые учитывают различные условия – такие как прибыль от удержания базового актива или его волатильность. Поэтому разработка новых и оценка существующих моделей ценообразования опционов являются актуальными.

Для оценки доходности или рискованности опциона используют распределения, которые описывают вероятности цен по активам, лежащим в основе, в момент истечения срока. К таким распределениям относят нормальное, логнормальное, биномиальное, распределение Пуассона и Парето-Леви [2].

Биномиальное распределение является одним из наиболее важных дискретных распределений в методологии оценки фондовых опционов. В этом случае цена базового актива моделируется как биномиальный процесс и подчиняется законам случайного блуждания (random walk). На каждом шаге по времени существует определенная вероятность того, что цена акции увеличится или уменьшится на некую относительную величину. Данный подход был изложен в статье Кокса (Cox), Росса (Ross) и Рубинштейна (Rubinstein), опубликованной в 1979 году [3]. На основе этой модели (сокращенно CRR-model) были разработаны модели ценообразования опционов с учетом различных факторов. Так, в работе [4] учитываются транзакционные издержки, в работе [5] в качестве входных данных используются нечеткие числа, в работе [6] риск-нейтральные процентные ставки и цена базового актива рассматриваются как интервалы. Если величина временного шага стремится к нулю, это приводит к предположению, что цены акций имеют логнормальное распределение, лежащее в основе модели Блэка-Шоулза [7].

Целью данной статьи является оценка опциона с помощью биномиальной модели с учетом риск-нейтральных процентных ставок и принципа отсутствия арбитража и разработка на основе данной модели программного продукта, позволяющего автоматизировать процесс ценообразования и наглядно выводить полученный результат в виде графиков.

Предположим, что текущая цена акции равна S_0, а искомую стоимость опциона обозначим С. Время действия опциона разбито на n интервалов. Цена-страйк опциона равна К.

Опишем движение цены в виде произведения, т.к. в случае сложения (S_0+u) могут быть получены отрицательные значения для цен активов. Так же предположим, что цены изменяются случайно и движение цены на i шаге не зависит от ее движения на шаге i-1, $i = \overline{1,t}$. Пусть к концу первого периода цена акции может либо подняться до величины S_0u, где u > 1, с вероятностью p, либо упасть до уровня S_0d, где d < 1, с вероятностью (1-p). Данные вероятности являются постоянными на протяжении всего срока оценивания опциона. Эти условия удовлетворяют **биномиальному распределению**.

Если цена акции увеличивается до величины S_0u, опцион приносит прибыль держателю опциона в размере f_u. Если же цена акции снижается до уровня S_0d, опцион приносит прибыль f_d. В конце первого периода они равны соответственно:

$f_u=\max(S_0u-K,0)$,

$f_d=\max(S_0d-K,0)$

Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 1.

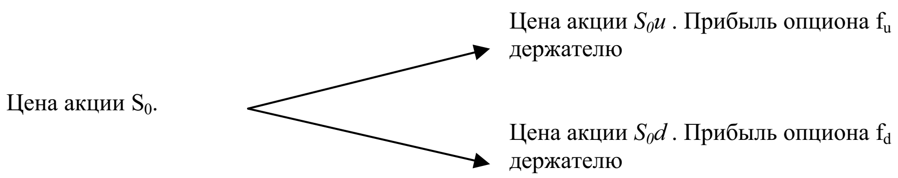

Рис. 1. Цена акции и цена опциона в одноступенчатом дереве

Таким образом, рассмотрено изменение цен в биномиальной модели для одного периода. Для n-го периода расчет ожидаемого значения цены актива состоит из трех шагов [8]: создание биномиального дерева возможных цен активов, определение вероятностей каждого из возможных результатов, умножение каждого из возможных результатов на его вероятность. Сума произведений и составит ожидаемое значение.

Как уже упоминалось, в биномиальном распределении на каждом этапе цена акции может принимать два значения, соответственно для трех этапов количество возможных цен будет уже 4. Изобразим биномиальное дерево цен на рис. 2.

Пусть j – это количество раз, когда цена возросла на n-м временном этапе. Тогда количество падений будет равняться (n-j). А возможные значения цен составят $S_0u^jd^{n-j}$.

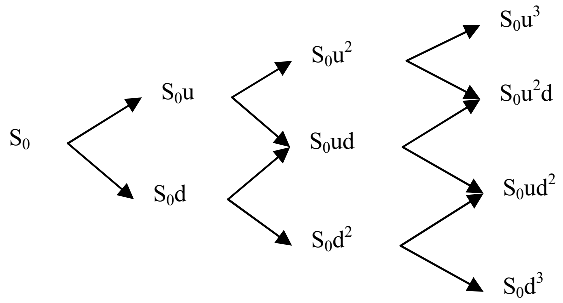

Рис. 2. Биномиальная решетка цен базовых активов

В биномиальном распределении количество способов достижения j успехов из n попыток рассчитывается как $C_j^n = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ [3]. Отсюда вероятность, что цена на n этапе достигнет значения $S_0u^jd^{n-j}$ равняется $pr(j) = C_j^n p^j (1-p)^{n-j}$, а ожидаемое значение прибыли по опциону на шаге n:

$$C_n = \sum_{j=0}^{n}\left(pr(j)max\left[0, S_0u^jd^{n-j} - K\right]\right) =$$
$$\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}max\left[0, S_0u^jd^{n-j} - K\right]\right)$$

Чтобы определить цену опциона в текущий момент необходимо ожидаемую прибыль по опциону C_n дисконтировать до текущего момента. $C = \frac{C_n}{e^{rt}} = \frac{\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}max\left[0, S_0u^jd^{n-j} - K\right]}{e^{rt}}$, где r это годичная процентная ставка, а период оценивания опциона t – время, выраженное в долях года. Для квартала t=1/4.

Зная величины p, u, d и r можно оценить стоимость опциона. Зачастую величины p и r находят, используя принципы отсутствия арбитража и отсутствия рисков, что позволяет найти их зависимость от остальных величин и не учитывать отношение держателя опциона к риску [9].

Предположим, что на рынке арбитражные возможности отсутствуют и экономический эффект от двух разных действий, приводящих к одинаковому конечному состоянию, должен быть одинаков. Это значит, что инвестору должно быть все равно – положить деньги в банк или же создать портфель из опциона и акций. Т.е. доходность, которую должен принести такой портфель за время T, равна безрисковой процентной ставке R, которую и будем применять при дисконтировании.

Портфель, который характеризуется безрисковой процентной ставкой, является безрисковым, что достигается путем хеджирования. Создадим инвестиционный портфель, состоящий из длинной позиции по пакету из Δ акций, и короткой позиции по одному опциону "колл". Такой портфель называют хеджированным [3; 8; 9], он используется для того, чтобы ограничить потери при неблагоприятном развитии ситуации. При этом снижение риска портфеля достигается за счет снижения его ожидаемой доходности путем включения в портфель производных финансовых инструментов, доходность которых противоположна доходности основных активов портфеля. Ценообразование опциона на базе создания безрискового хеджа позволяет избежать зависимости цены опциона от ожиданий инвесторов относительно будущей цены этого актива. Именно условие безрисковости позволит найти значения *p*.

Стоимость создания безрискового портфеля в начальный момент времени – это стоимость покупки акций ΔS_0 минус премии от проданных опционов в размере C. Отсюда – стоимость портфеля равна ($\Delta S_0 - C$). Обозначим $L_0 = \Delta S_0 - C$ – сумма вложений в портфель.

Рассмотрим теперь доход от вложений в депозит. Положив сумму денег L_0 в банк под R% годовых через время t (выраженное в долях года) получим сумму равную $L=L_0*(1+r)^t = L_0e^{rt}$. Подставив выражение L_0 получим:

$$L=(\Delta S_0 - C)\, e^{rt}. \tag{1}$$

Вернемся к рассмотрению портфеля. Вычислим величину Δ, при которой портфель становится свободным от риска. Это означает, что при любом исходе – росте или падении цены на акцию – стоимость портфеля должна остаться одинаковой.

Рассмотрим эти случаи подробнее.

Пусть цена акции растет до S_0u, тогда стоимость пакета акций в момент истечения срока действия опциона составит $S_0u\Delta$, а затраты из-за опциона, предъявленного инвестору к выплате (равные прибыли держателя опциона) – f_u. Стоимость портфеля равна $S_0u\Delta-f_u$.

Аналогично, если цена падает до S_0d, то стоимость пакета акций составит – $S_0d\Delta$, затраты на опцион – f_d, а общая стоимость портфеля – $S_0d\Delta-f_d$.

Как уже упоминалось, портфель является свободным от рисков, если величина Δ выбрана так, что стоимость портфеля в обоих вариантах является одинаковой. Отсюда следует, что

$$S_0u\Delta-f_u = S_0d\Delta-f_d,$$

т.е.

$$\Delta=\frac{f_u-f_d}{S_0u-S_0d}. \tag{2}$$

Из данной формулы видно, что величина Δ представляет собой отношение изменения цены опциона к изменению цены акции при перемещении из одного узла дерева в другой (рис. 1).

Выполняя условие отсутствия арбитража, приравняем величину L (1) к доходности портфеля в момент истечения срока действия опциона t:

$$(\Delta S_0 - C)\, e^{rt} = S_0u\Delta-f_u$$

Подставив в это выражение значение из формулы (2), получаем:

$$\left(S_0\frac{f_u-f_d}{S_0u-S_0d}-C\right)e^{rt}=S_0u\frac{f_u-f_d}{S_0u-S_0d}-f_u$$

$$S_0\frac{f_u-f_d}{S_0u-S_0d}e^{rt}-Ce^{rt}=S_0u\frac{f_u-f_d}{S_0u-S_0d}-f_u$$

$$Ce^{rt}=S_0\frac{f_u-f_d}{S_0u-S_0d}e^{rt}-S_0u\frac{f_u-f_d}{S_0u-S_0d}-f_u=S_0\frac{f_u-f_d}{S_0(u-d)}e^{rt}-S_0u\frac{f_u-f_d}{S_0(u-d)}-f_u=$$

$$\frac{f_u-f_d}{(u-d)}e^{rt}-u\frac{f_u-f_d}{(u-d)}-f_u$$

откуда

$$C=\frac{f_u-f_d}{u-d}-u\frac{f_u-f_d}{u-d}e^{-rt}+f_ue^{-rt}=e^{-rt}\left(\frac{f_u-f_d}{u-d}e^{rt}-u\frac{f_u-f_d}{u-d}+f_u\right)=$$

$$e^{-rt}\left(\frac{f_ue^{rt}-f_de^{rt}-uf_u+uf_d+uf_u-df_u}{u-d}\right)=e^{-rt}\left(\frac{f_ue^{rt}-f_de^{rt}+uf_d-df_u}{u-d}\right)=e^{-rt}\left(f_d\frac{u-e^{rt}}{u-d}+\right.$$

$$\left.f_u\frac{e^{rt}-d}{u-d}\right)$$

Введем замену

$$p=\frac{e^{rt}-d}{u-d},\ 1-p=\frac{u-d-e^{rt}+d}{u-d}=\frac{u-e^{rt}}{u-d} \tag{3}$$

$$C=e^{-rt}(f_d(1-p)+f_up)$$

Если бы стоимость опциона была больше C, то стоимость портфеля стала бы ниже, а его доходность – выше безрисковой ставки. Если бы стоимость опциона была меньше С, то, продав портфель без покрытия, инвестор сделал бы заем по ставке ниже безрисковой.

Величина p и есть вероятность роста цены акции в риск-нейтральном мире, а величина 1-p – вероятность снижения цены, тогда выражение $f_d(1-p)+f_u p$ представляет собой ожидаемый выигрыш, который приносит опцион. При такой интерпретации величины p формула (3) означает, что текущая стоимость опциона равна его ожидаемой будущей стоимости с учетом безрисковой процентной ставки, что и требовалось найти.

С учетом вышеизложенного, цена опциона находится из формулы

$$C=\frac{\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}max\left[0,S_0u^jd^{n-j}-K\right]}{e^{rt}}, \tag{4}$$

где r – годовая безрисковая процентная ставка, t – время оценивания опциона в долях года, p – вероятность роста цены за один период, u – коэффициент роста цены за один период, d – коэффициент падения цены за один период, S_0 – текущая цена базового актива, K – цена-страйк опциона.

На основе выведенных формул (3) и (4) был разработан программный продукт, который позволяет в случае, если инвестор знает величину p, но не уверен в величинах u и d, определить цену опциона как функцию c(u,d) от двух переменных. При этом, задавая неизвестные нечеткие числа $[u_1, u_2]$, $[d_1, d_2]$, находится матрица ответов, которая для наглядности отображается графически.

В обратном случае, если величины u, d известны, но инвестор не может задать p, то для нескольких периодов n вероятность находится из формулы $p=\frac{e^{rt/n}-d}{u-d}$. Тогда цена опциона будет четко определена, но для разных комбинаций u и d вероятность роста цены будет распределена неравномерно и тоже выведена графически.

Рассмотрим пример. Пусть на рынке обращаются акции с текущей ценой S_0=32. Необходимо определить цену опциона на эту акцию с ценой страйк К=31 и сроком истечения месяц, t=1/12. Пусть годовая процентная ставка равняется r=0,12. Предположим, что цена акции меняется согласно биномиального закона распределения. Пусть за месяц она может изменится 100 раз, n=100. И в каждый из этих 100 периодов она может либо возрасти в пределах u=[1,0006:1,0007] либо упасть в пределах d=[0,9996:0,9994] при этом инвестор оценивает возможность роста цены как более вероятную p=0,6.

На основании этих данных разработанная программа в среде VBA позволяет рассчитать значения оцениваемого опциона:

Таблица 1. Расчетные значения цены опциона для различных комбинаций u и d

u \ d	0.9996	0.99956	0.99952	0.99948	0.99944	0.9994
1.0006	1.62999	1.57833	1.52675	1.475251	1.423833	1.3724
1.000616	1.6623	1.61061	1.55898	1.50742	1.455959	1.40457
1.000633	1.6946	1.64292	1.5912	1.53963	1.488118	1.43668
1.00065	1.7270	1.67526	1.62353	1.57188	1.5203	1.46881
1.000666	1.75951	1.70764	1.65585	1.604	1.5525	1.5009
1.000683	1.7919	1.74005	1.688214	1.6364	1.5847	1.5331
1.0007	1.8244	1.77249	1.72060	1.66879	1.617	1.5654

Искомая цена опциона колеблется в пределах [1,37:1,82], графически функциональная зависимость C(u,d) будет выглядеть как на рис.3.

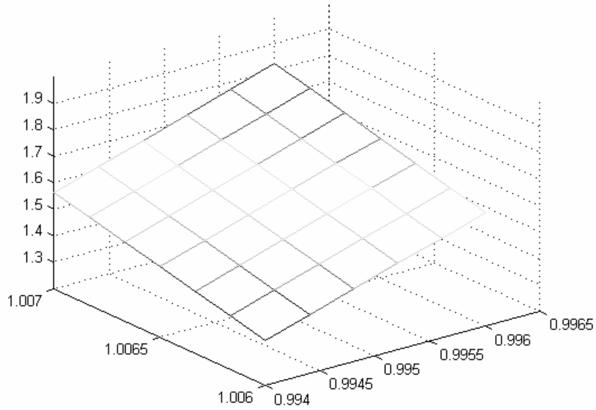

Рис. 3. Зависимость цены опциона от входных параметров u и d при постоянной вероятности p

Оставим исходные данные те же, но предположим, что инвестор не может сказать вероятность роста цены, тогда вероятность будет определяться исходя из модели для каждой комбинации $[u_i,d_j]$. В таком случае цена опциона будет неизменна и равна C=1,308, а распределение вероятностей изобразим на рис. 4.

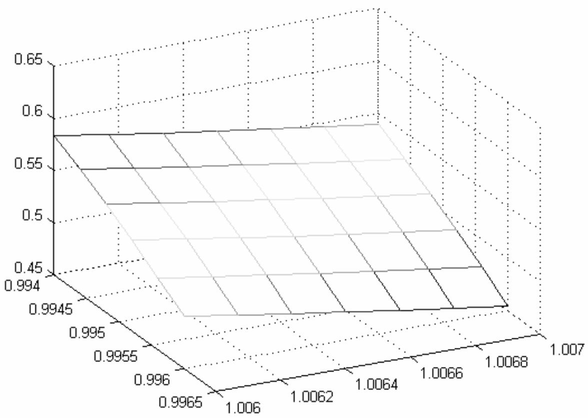

Рис. 4. Зависимость расчетной вероятности p от входных параметров u и d

Выводы. Рассмотрим распределение вероятностей цены базового актива в первом и втором случае (рис.5 и рис.6).

Как видим в первом случае (рис. 5) – когда инвестор оценивает вероятность роста цены как постоянную для всех вариантов изменения этой цены – функция распределения двигается вдоль оси абсцисс – т.е. меняется наиболее ожидаемое значение цены, в то время как ее волатильность остается неизменной. Для этого случая находится нечеткое значение цены опциона (табл.1).

Во втором же случае (рис. 6) – когда инвестор не может сказать вероятность роста цены базового актива и она задается из принципа отсутствия арбитража, ожидаемое значение цены остается постоянным, но меняется волатильность – что выражается в различной толщине «хвостов» функции распределения. В этом случае цена опциона одна, однако инвестор может сравнить свои ожидания с распределением вероятностей комбинаций u и d (рис. 4).

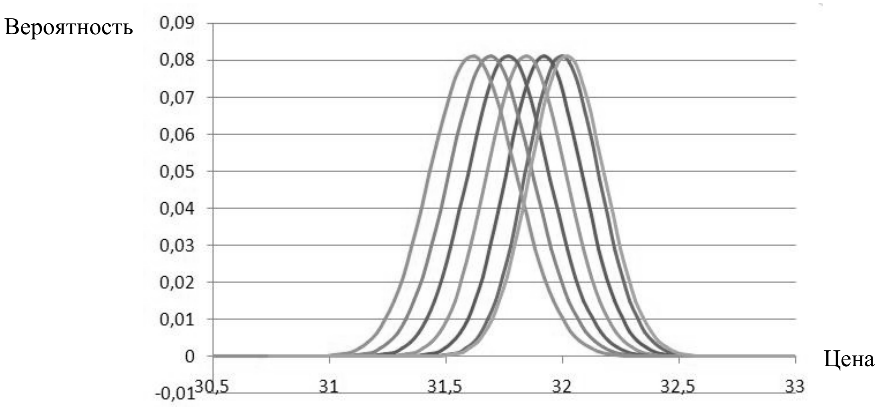

Рис.5. Распределение цены базового актива в случае постоянной вероятности роста цены

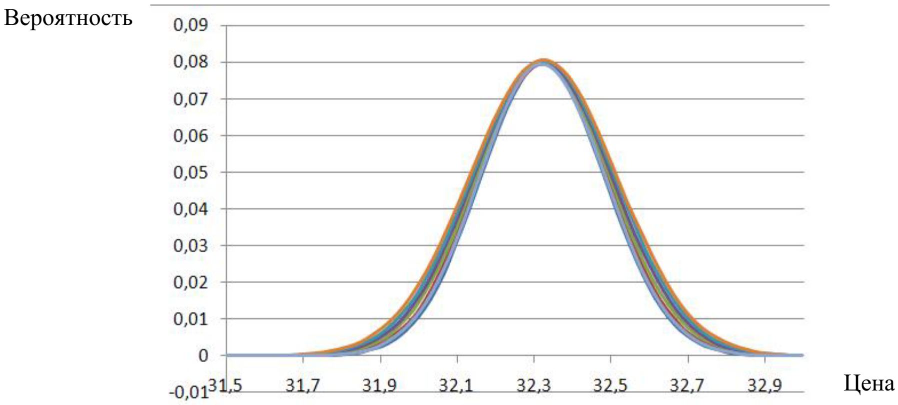

Рис 6. Распределение цены базового актива в случае постоянного ожидаемого значения цены

Данная модель и разработанное к ней программное обеспечение позволяет графически оценить функции биномиального распределения цен базового актива для случаев постоянной и расчетной вероятности роста цены базового актива и, выбрав более подходящий вариант, находить цену опциона на основе текущей цены базового актива и его волатильности (задаваемые величины u и d),

Дальнейшие разработки в этом направлении позволят учитывать и другие виды функций распределения цены базового актива, кроме биномиального.

Библиографические ссылки и примечания

1. Налоговый кодекс Украины [Электронный ресурс]. – Режим доступу: www.rada.gov.ua
2. Елисеева И.И. Теория статистики с основами теории вероятностей / под ред. И.И. Елисеевой. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 446 с.
3. Cox J.C. Option Pricing: A Simplified Approach / J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein // Journal of Financial Economics. 1979. – Vol. 7. – P. 229–263.
4. Melnikov A. On option pricing in binomial market with transaction costs / Alexander V. Melnikov, Yury G. Petrachenko // Finance and Stochastics. 2005. – Vol. 9 (1). – P. 141–149.
5. Zmeškal Z. Generalised soft binomial American real option pricing model (fuzzy–stochastic approach) / Zmeškal Zdeněk // European Journal of Operational Research. – 2010. – Vol. 207 (2). – P. 1096–1103.

6. Muzzioli S. A multiperiod binomial model for pricing options in a vague world / S. Muzzioli, C. Torricelli // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2004. – Vol. 28 (5). – P. 861–887.
7. Black F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – P. 637–654.
8. Hull J.C. Options, futures, and other derivatives / J.C. Hull. L. – Prentice Hall, 2003 – 1044 p.
9. Уотшем Т. Дж. Количественные методы в финансах / Уотшем Т. Дж.; пер. с англ. под ред. М.Р. Ефимовой. – М.: Финансы; ЮНИТИ, 1999. – 527 с.

Поступила в редакцию 16.05.2011